Moknine A.S :2008/2009

Devoir de contrôle N°3

Classes $4^{ème}$sc

Durée : 2.h

Exercice N°1:

La durée de vie d'un ordinateur avant qu'il subisse la première panne est une variable aléatoire X appelée durée de vie sans vieillissement définie sur $[0,+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ d'où la probabilité qu'un ordinateur tombe en panne avant l'instant t (exprimé en année) est $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

Choisir la réponse exacte :

1/ $P(X \geq t)$ a pour valeur exacte :

a) $e^{-\lambda t}$ b) $1 - e^{-\lambda t}$ c) $1 - \lambda e^{-\lambda t}$

2/ La valeur exacte de t pour laquelle $P(X \leq t) = P(X \geq t)$:

a) $\dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ b) $\dfrac{\lambda}{\ln(2)}$ c) $\ln(\dfrac{\lambda}{2})$

3/ La probabilité qu'un ordinateur n'a pas eu de panne durant les deux première années est 0.2 alors la valeur exacte de λ est :

a) $\lambda = \dfrac{\ln(5)}{2}$ b) $\lambda = \dfrac{\ln(0.2)}{2}$ c) $\lambda = 0.804$

4/ $P(\{X \leq 5\}/\{X \geq 2\})$ a pour valeur exacte :

a) $1 - e^{-3\lambda}$ b) $\dfrac{e^{-5\lambda} - e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}}$ c) $e^{-3\lambda}$

Exercice N°2: (6 pts)

Une urne contient six boules : quatre blanches et deux jaunes, toutes les boules sont indiscernables au toucher

On tire simultanément et au hasard quatre boules de l'urne.

1/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

A « n'obtenir aucune boule jaune »

B « Obtenir exactement deus boules jaunes »

C « Obtenir trois boules blanches »

2/ On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées .

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X

c) Montrer que : $P(X \geq 3) = \dfrac{3}{5}$

3/ On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les quatre boules tirées dans l'urne et on désigne par Y, l'aléas numérique prenant pour valeur le nombre d'épreuves donnant au moins trois boules blanches.

a) Etablir la loi de probabilité de Y

b)Calculer $\sigma(Y)$.

Exercice N°3: (5 pts)

1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α et que: $1,1 < \alpha < 1,2$

c) En déduire le signe de g(x)

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

a) Montrer que : $\forall x \geq 0 \ f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

d) Ecrire une équation de la demi tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse 0.

3/ Tracer (T) et ζ_f courbe représentative de f dans un R .O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$

4 /a) Montrer que : $\forall x \geq 0 : f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

b) Calculer l'aire du partie du plan limité par ζ_f et les droites d'équations respectives x = 0 ; $x = \alpha$ et y =0

Exercice N°4:

Soit l'équation différentielle : (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$. On se propose de résoudre E sur $]0, +\infty[$

1/ Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = y$

2/ Montrer que $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est une solution de E

3/a) Montrer que $(g - f)$ est solution de (E_0) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si g est solution de E

b) Déduire les solution de (E) sur $]0, +\infty[$

4/ La vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre des bactéries en présence.

On note $N(t)$ le nombre de bactéries (en million) d'individu et $N'(t)$ la vitesse d'accroissement

On suppose que $N(t)$ vérifies (E) et $N(0) = N_0$

En combien de temps (t en seconde) le nombre de bactérie sera le double